

KATALOG POŽADAVKŮ ZKOUŠEK SPOLEČNÉ ČÁSTI MATURITNÍ ZKOUŠKY

platný od školního roku **2015/2016**

MATEMATIKA



Zpracoval: Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání
Schválil: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
Dne: 24. 4. 2014
pod č. j.: MSMT-6858/2014-CERMAT

KATALOG POŽADAVKŮ ZKOUŠEK SPOLEČNÉ ČÁSTI MATURITNÍ ZKOUŠKY

platný od školního roku **2015/2016**

MATEMATIKA

Zpracoval: Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání
Schválil: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
Dne: 24. 4. 2014
pod č. j.: MSMT-6858/2014-CERMAT

Obsah

Úvod	5
Požadavky na vědomosti a dovednosti, které mohou být ověřovány v rámci maturitní zkoušky z matematiky	6
Část A – Kompetence	6
Část B – Tematické okruhy	7
Část C – Základní specifikace povinné zkoušky z matematiky	13
Část D – Příklady testových úloh pro povinnou zkoušku z matematiky	13

Úvod

Účel a obsah katalogu

Katalog požadavků k maturitní zkoušce z matematiky je vydáván v souladu s ustanovením § 78a odst. 1 zákona č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (dále jen školský zákon), ve znění pozdějších předpisů a vymezuje rozsah požadavků na vědomosti a dovednosti žáků vzdělávacích programů v oborech středního vzdělávání s maturitní zkouškou.

Způsob a formu ověřování znalostí a dovedností stanoví prováděcí vyhláška č. 177/2009 Sb., o bližších podmínkách ukončování vzdělávání ve středních školách maturitní zkouškou, ve znění pozdějších předpisů.

Součástí vymezení požadavků je i rámcová specifikace povolených pomůcek. Podrobnější vymezení rozsahu a struktury povolených pomůcek stanoví, s ohledem na technologický a informační vývoj, ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy jako součást oznámení kritérií hodnocení v souladu s prováděcí vyhláškou ke školskému zákonu.

Pedagogické dokumenty ke katalogu a k maturitní zkoušce

Katalogy byly připravovány v souladu s pedagogickými dokumenty, a to s **rámcovými vzdělávacími programy pro gymnaziální obory vzdělání a rámcovými vzdělávacími programy pro obory středního odborného vzdělávání s maturitní zkouškou**, a také s platnými učebními dokumenty pro střední odborné školy.

Jako podpůrné prameny byly využity publikované standardy a didaktické materiály:

FUCHS, E., BINTEROVÁ, H. a kol. **Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborná učiliště**. Praha: Prometheus, 2003, ISBN 80–7196–294–5.

FUCHS, E., KUBÁT, J. a kol. **Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia**. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80–7196–095–0.

FUCHS, E., PROCHÁZKA, F. a kol. **Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborné školy**. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80–7196–097–7.

Nedílnou součástí Katalogu požadavků k maturitní zkoušce z matematiky je příloha s ukázkami testových úloh.

Požadavky na vědomosti a dovednosti, které mohou být ověřovány v rámci maturitní zkoušky z matematiky

Část A – Kompetence

Očekávané vědomosti a dovednosti pro maturitní zkoušku z matematiky v rámci společné části maturitní zkoušky jsou v této části specifikovány v pěti hlavních kategoriích kompetencí, k jejichž získání směřuje výuka matematiky v rámci středního vzdělávání zakončeného maturitní zkouškou.

Osvojení matematických pojmů a dovedností

Žák dovede:

- užívat správně matematické pojmy (definovat pojmy a určit jejich obsah, charakterizovat pojem různými způsoby, třídit pojmy a nalézat vztahy mezi nimi);
- numericky počítat a užívat proměnnou (provádět základní početní operace, odhadnout výsledek výpočtu, využít efektivní způsoby výpočtu, upravit výrazy s čísly a proměnnými, stanovit definiční obor výrazu, na základě reálné situace sestavit výraz s proměnnými);
- pracovat s rovinnými a prostorovými útvary (rozpoznat a pojmenovat geometrické útvary, využívat geometrickou představivost při analýze rovinných a prostorových vztahů, měřit a odhadovat výsledek měření, řešit početně geometrickou úlohu, řešit konstrukčně geometrickou úlohu);
- matematicky argumentovat (rozlišit různé typy tvrzení – definice, věta, rozumět logické stavbě matematické věty).

Matematické modelování

Žák dovede:

- matematizovat reálné situace (odhalit kvantitativní nebo prostorové vztahy a zákonitosti, vytvořit matematický model reálné situace);
- pracovat s matematickým modelem;
- ověřit vytvořený model z hlediska reálné situace (vyjádřit výsledek řešení modelu v kontextu reálné situace, vyhodnotit výsledek modelové situace).

Vymezení a řešení problému

Žák dovede:

- vymežit problém;
- analyzovat problém;
- zvolit vhodnou metodu řešení problému (popsat problém vzorcem, užít známý algoritmus);
- vyřešit problém;
- diskutovat o výsledcích;
- aplikovat osvojené metody řešení problémů v jiných tématech a oblastech.

Komunikace

Žák dovede:

- číst s porozuměním matematický text;
- vyhodnotit informace kvantitativního i kvalitativního charakteru obsažené v grafech, diagramech, tabulkách atd.;
- přesně se vyjádřit (užívat jazyk matematiky včetně symboliky a terminologie, zdůvodnit matematické tvrzení, obhájit vlastní řešení problému, prezentovat výsledky řešení úlohy a prezentovat geometrické konstrukce na dobré grafické úrovni);
- prezentovat získané informace a výsledky (zpracovat získané údaje formou grafů, diagramů, tabulek atd.).

Užití pomůcek

Žák dovede:

- využít informační zdroje (odborná literatura, internet atd.);
- efektivně řešit problémy pomocí kalkulátoru a PC;
- použít kalkulátor a PC k prezentaci řešení problémů;
- použít tradiční prostředky grafického vyjadřování.

Část B – Tematické okruhy

Druhá část požadavků pro povinnou zkoušku z matematiky obsahuje požadavky na konkrétní vědomosti a dovednosti z jednotlivých tematických okruhů.

1. Číselné obory

Žák dovede:

1.1 Přirozená čísla

- provádět aritmetické operace s přirozenými čísly;
- rozlišit prvočíslo a číslo složené, rozložit přirozené číslo na prvočinitele;
- užít pojem dělitelnost přirozených čísel a znaky dělitelnosti;
- rozlišit čísla soudělná a nesoudělná;
- určit největšího společného dělitele a nejmenší společný násobek přirozených čísel.

1.2 Celá čísla

- provádět aritmetické operace s celými čísly;
- užít pojem opačné číslo.

1.3 Racionální čísla

- pracovat s různými tvary zápisu racionálního čísla a jejich převody;
- užít dekadický zápis čísla;
- provádět operace se zlomky;
- provádět operace s desetinnými čísly včetně zaokrouhlování, určit řád čísla;
- řešit úlohy na procenta a zlomky, užívat trojčlenku a poměr;
- znázornit racionální číslo na číselné ose, porovnávat racionální čísla;
- užívat jednotky a jejich převody.

1.4 Reálná čísla

- zařadit číslo do příslušného číselného oboru;
- provádět aritmetické operace v číselných oborech, porovnávat reálná čísla;
- užít pojmy opačné číslo a převrácené číslo;
- znázornit reálné číslo nebo jeho aproximaci na číselné ose;
- určit absolutní hodnotu reálného čísla a chápat její geometrický význam;
- provádět operace s mocninami s celočíselným a racionálním exponentem a odmocninami;
- řešit praktické úlohy s mocninami s přirozeným exponentem a odmocninami.

1.5 Číselné množiny

- užívat označení číselných oborů **N**, **Z**, **Q** a **R**;
- zapisovat a znázorňovat číselné množiny a intervaly, určovat jejich průnik a sjednocení.

2 Algebraické výrazy

Žák dovede:

2.1 Algebraický výraz

- určit hodnotu výrazu;
- určit nulový bod výrazu;
- určit definiční obor výrazu;
- sestavit výraz, interpretovat výraz;
- modelovat reálné situace užitím výrazů.

2.2 Mnohočleny

- užít pojmy člen, koeficient, stupeň mnohočlenu;
- provádět operace s mnohočleny, provádět umocnění dvojčlenu pomocí vzorců;
- rozložit mnohočlen na součin vytýkáním a užitím vzorců.

2.3 Lomené výrazy

- provádět operace s lomenými výrazy;
- určit definiční obor lomeného výrazu.

2.4 Výrazy s mocninami a odmocninami

- provádět operace s výrazy obsahujícími mocniny a odmocniny;
- určit definiční obor výrazu s mocninami a odmocninami.

3 Rovnice a nerovnice

Žák dovede:

3.1 Algebraické rovnice a nerovnice

- užít pojmy rovnice a nerovnice s jednou neznámou, levá a pravá strana rovnice a nerovnice, obor rovnice a nerovnice, kořen rovnice, množina všech řešení rovnice a nerovnice;
- užít ekvivalentní úpravy rovnice a nerovnice;
- provádět zkoušku.

3.2 Lineární rovnice a jejich soustavy

- řešit lineární rovnice o jedné neznámé;
- vyjádřit neznámou ze vzorce;
- řešit rovnice v součinném a podílovém tvaru;
- řešit početně soustavy lineárních rovnic;

- řešit graficky soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých;
- užít lineární rovnice a jejich soustavy při řešení slovní úlohy.

3.3 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

- stanovit definiční obor rovnice;
- řešit rovnice o jedné neznámé s neznámou ve jmenovateli;
- vyjádřit neznámou ze vzorce;
- užít rovnice s neznámou ve jmenovateli při řešení slovní úlohy;
- využít k řešení slovní úlohy nepřímé úměrnosti.

3.4 Kvadratické rovnice

- řešit neúplné i úplné kvadratické rovnice a nerovnice;
- užít vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice;
- užít kvadratickou rovnici při řešení slovní úlohy.

3.5 Lineární nerovnice s jednou neznámou a jejich soustavy

- řešit lineární nerovnice s jednou neznámou a jejich soustavy;
- řešit nerovnice v součinném a podílovém tvaru.

4 Funkce

Žák dovede:

4.1 Základní poznatky o funkcích

- užít různá zadání funkce a používat s porozuměním pojmy definiční obor, obor hodnot, argument funkce, hodnota funkce, graf funkce včetně jeho názvu;
- sestrojít graf funkce dané předpisem $y = f(x)$ nebo část grafu pro hodnoty proměnné x z dané množiny, určit hodnoty proměnné x pro dané hodnoty funkce f ;
- přiřadit předpis funkce ke grafu funkce a opačně;
- určit průsečíky grafu funkce s osami soustavy souřadnic;
- určit z grafu funkce intervaly monotonie a bod, v němž nabývá funkce extrému;
- užívat výrazy s elementárními funkcemi;
- modelovat reálné závislosti užitím elementárních funkcí.

4.2 Lineární funkce, lineární lomená funkce

- užít pojem a vlastnosti přímé úměrnosti, sestrojít její graf;
- určit lineární funkci, sestrojít její graf;
- objasnit geometrický význam parametrů a, b v předpisu funkce $y = ax + b$;
- určit předpis lineární funkce z daných bodů nebo grafu funkce;
- užít pojem a vlastnosti nepřímé úměrnosti, sestrojít její graf;
- užít pojem a vlastnosti lineární lomené funkce, sestrojít její graf;
- určit předpis lineární lomené funkce z daných bodů nebo grafu funkce;
- řešit reálné problémy pomocí lineární funkce a lineární lomené funkce.

4.3 Kvadratické funkce

- určit kvadratickou funkci, stanovit definiční obor a obor hodnot, sestrojít graf kvadratické funkce;
- vysvětlit význam parametrů v předpisu kvadratické funkce, určit intervaly monotonie a bod, v němž nabývá funkce extrému;
- řešit reálné problémy pomocí kvadratické funkce.

4.4 Exponenciální a logaritmické funkce, jednoduché rovnice

- určit exponenciální funkci, stanovit definiční obor a obor hodnot, sestavit graf;
- určit logaritmickou funkci, stanovit definiční obor a obor hodnot, sestavit graf, užít definici logaritmické funkce;
- vysvětlit význam základu a v předpisech obou funkcí, monotonie;
- užít logaritmu, věty o logaritmech, řešit jednoduché exponenciální a logaritmické rovnice, užít logaritmování při řešení exponenciální rovnice;
- upravovat výrazy obsahující exponenciální a logaritmické funkce a stanovit jejich definiční obor;
- použít poznatky o exponenciálních a logaritmických funkcích v jednoduchých praktických úlohách.

4.5 Goniometrické funkce

- užít pojmy orientovaný úhel, velikost úhlu, stupňová míra, oblouková míra a jejich převody;
- definovat goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku;
- definovat goniometrické funkce v intervalu $(0; 2\pi)$, resp. $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ nebo $(0; \pi)$, resp. v oboru reálných čísel, u každé z nich určit definiční obor a obor hodnot, sestavit graf;
- užívat vlastností goniometrických funkcí, určit z grafu funkce intervaly monotonie a body, v nichž nabývá funkce extrému;
- upravovat jednoduché výrazy obsahující goniometrické funkce a stanovit jejich definiční obor;
- užívat vlastností a vztahů goniometrických funkcí při řešení jednoduchých goniometrických rovnic.

5 Posloupnosti a finanční matematika

Žák dovede:

5.1 Základní poznatky o posloupnostech

- aplikovat znalosti o funkcích při úvahách o posloupnostech a při řešení úloh o posloupnostech;
- určit posloupnost vzorcem pro n -tý člen, graficky, výčtem prvků.

5.2 Aritmetická posloupnost

- určit aritmetickou posloupnost a chápat význam diference;
- užít základní vzorce pro aritmetickou posloupnost.

5.3 Geometrická posloupnost

- určit geometrickou posloupnost a chápat význam kvocientu;
- užít základní vzorce pro geometrickou posloupnost.

5.4 Využití posloupností pro řešení úloh z praxe, finanční matematika

- využít poznatků o posloupnostech při řešení problémů v reálných situacích;
- řešit úlohy finanční matematiky.

6 Planimetrie

Žák dovede:

6.1 Planimetrické pojmy a poznatky

- užít pojmy bod, přímka, polopřímka, rovina, polorovina, úsečka, úhly (vedlejší, vrcholové, střídavé, souhlasné), objekty znázornit;

- užít s porozuměním polohové a metrické vztahy mezi geometrickými útvary v rovině (rovnoběžnost, kolmost a odchylka přímek, délka úsečky a velikost úhlu, vzdálenosti bodů a přímek);
- rozlišit konvexní a nekonvexní útvary, popsat jejich vlastnosti a správně jich užívat;
- využít poznatků o množinách všech bodů dané vlastnosti v konstrukčních úlohách.

6.2 Trojúhelníky

- určit objekty v trojúhelníku, znázornit je a správně využít jejich základních vlastností, pojmy užívat s porozuměním (strany, vnitřní a vnější úhly, osy stran a úhlů, výšky, ortocentrum, těžnice, těžiště, střední příčky, kružnice opsaná a vepsaná);
- při řešení početních i konstrukčních úloh využívat věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků;
- užít s porozuměním poznatky o trojúhelnících (obvod, obsah, velikost výšky, Pythagorova věta, poznatky o těžnicích a těžišti) v úlohách početní geometrie;
- řešit úlohy s užitím trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku a obecného trojúhelníku (sinová věta, kosinová věta, obsah trojúhelníku určeného *sus*).

6.3 Mnohoúhelníky

- rozlišit základní druhy čtyřúhelníků (různoběžníky, rovnoběžníky, lichoběžníky), popsat jejich vlastnosti a správně jich užívat;
- pojmenovat, znázornit a správně užít základní pojmy ve čtyřúhelníku (strany, vnitřní a vnější úhly, osy stran a úhlů, kružnice opsaná a vepsaná, úhlopříčky, výšky);
- popsat, znázornit a užít vlastnosti konvexních mnohoúhelníků a pravidelných mnohoúhelníků;
- užít s porozuměním poznatky o čtyřúhelnících (obvod, obsah, vlastnosti úhlopříček a kružnice opsané nebo vepsané) v úlohách početní geometrie;
- užít s porozuměním poznatky o pravidelných mnohoúhelnících v úlohách početní geometrie.

6.4 Kružnice a kruh

- pojmenovat, znázornit a správně užít základní pojmy týkající se kružnice a kruhu (tětiva, kružnicový oblouk, kruhová výseč a úseč, mezikruží), popsat a užít jejich vlastnosti;
- užít s porozuměním polohové vztahy mezi body, přímkami a kružnicemi;
- aplikovat metrické poznatky o kružnicích a kruzích (obvod, obsah) v úlohách početní geometrie.

6.5 Geometrická zobrazení

- popsat a určit shodná zobrazení (souměrnosti, posunutí, otočení) a užít jejich vlastnosti.

7 Stereometrie

Žák dovede:

7.1 Tělesa

- charakterizovat jednotlivá tělesa (krychle, kvádr, hranol, jehlan, rotační válec, rotační kužel, komolý jehlan a kužel, koule a její části), vypočítat jejich objem a povrch;
- užívat jednotky délky, obsahu a objemu, provádět převody jednotek;
- užít polohové a metrické vlastnosti v hranolu;
- využít poznatků o tělesech v úlohách.

8 Analytická geometrie

Žák dovede:

8.1 Souřadnice bodu a vektoru na přímce

- určit vzdálenost dvou bodů a souřadnice středu úsečky;
- užít pojmy vektor a jeho umístění, souřadnice vektoru a velikost vektoru;
- provádět operace s vektory (součet vektorů, násobek vektoru reálným číslem).

8.2 Souřadnice bodu a vektoru v rovině

- užít souřadnice bodu v kartézské soustavě souřadnic;
- určit vzdálenost dvou bodů a souřadnice středu úsečky;
- užít pojmy vektor a jeho umístění, souřadnice vektoru a velikost vektoru;
- provádět operace s vektory (součet vektorů, násobek vektoru reálným číslem, skalární součin vektorů) a užít jejich grafickou interpretaci;
- určit velikost úhlu dvou vektorů, užít vlastnosti kolmých a kolineárních vektorů.

8.3 Přímka v rovině

- užít parametrické vyjádření přímky, obecnou rovnici přímky a směrnicový tvar rovnice přímky v rovině;
- určit polohové a metrické vztahy bodů a přímek v rovině a aplikovat je v úlohách.

9 Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika

Žák dovede:

9.1 Základní poznatky z kombinatoriky a pravděpodobnosti

- užít základní kombinatorická pravidla;
- rozpoznat kombinatorické skupiny (variace s opakováním, variace, permutace, kombinace bez opakování), určit jejich počty a užít je v reálných situacích;
- počítat s faktoriály a kombinačními čísly;
- užít s porozuměním pojmy náhodný pokus, výsledek náhodného pokusu, náhodný jev, opačný jev, nemožný jev a jistý jev;
- určit množinu všech možných výsledků náhodného pokusu, počet všech výsledků příznivých náhodnému jevu a vypočítat pravděpodobnost náhodného jevu.

9.2 Základní poznatky ze statistiky

- užít pojmy statistický soubor, rozsah souboru, statistická jednotka, statistický znak kvalitativní a kvantitativní, hodnota znaku a pojmy vysvětlit;
- vypočítat četnost a relativní četnost hodnoty znaku, sestavit tabulku četností, graficky znázornit rozdělení četností;
- určit charakteristiky polohy (aritmetický průměr, medián, modus, percentil) a variability (rozptyl a směrodatná odchylka);
- vyhledat a vyhodnotit statistická data v grafech a tabulkách.

Část C – Základní specifikace zkoušky z matematiky

Zkouška má formu didaktického testu tvořeného různými typy uzavřených testových úloh (s jednou správnou odpovědí) včetně jejich svazků, otevřenými úlohami se stručnou odpovědí a otevřenými úlohami se širokou odpovědí. Testové úlohy mají různou bodovou hodnotu, která je uvedena u každé úlohy v testu.

V průběhu didaktického testu budou mít žáci k dispozici Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, kalkulačtor (bez grafického režimu, řešení rovnic a úprav algebraických výrazů) a rýsovací potřeby.¹

V následující tabulce je uvedeno orientační procentuální zastoupení skupin požadavků (tematických okruhů) k maturitní zkoušce v didaktickém testu:

Tematické okruhy	Zastoupené v testu (v %)
1. Číselné množiny	4–12
2. Algebraické výrazy	8–18
3. Rovnice a nerovnice	12–20
4. Funkce	10–20
5. Posloupnosti a finanční matematika	4–14
6. Planimetrie	8–18
7. Stereometrie	4–12
8. Analytická geometrie	4–14
9. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika	4–14

¹ Součástí vymezení požadavků je i rámcová specifikace povolených pomůcek. Podrobnější vymezení rozsahu a struktury povolených pomůcek stanoví, s ohledem na technologický a informační vývoj, ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy jako součást oznámení kritérií hodnocení v souladu s prováděcí vyhláškou ke školskému zákonu.

Část D – Příklady testových úloh pro povinnou zkoušku z matematiky

Testové úlohy jsou uvedeny jako samostatné ukázky, jejich zastoupení necharakterizuje strukturu testu. Soubor ukázek nelze považovat za sestavený test. V ukázkách úloh je správné řešení uvedeno vždy za úlohou.

1. Číselné množiny

1 Kolik celých čísel leží v intervalu $(-\sqrt[3]{10^9}; \sqrt{10\,000})$?

- A) 1 099
- B) 1 100
- C) 1 101
- D) 10 099
- E) 11 001

Řešení: B

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Akciová společnost prodala v prvním čtvrtletí letošního roku zboží za 78 milionů Kč. Ve srovnání se stejným obdobím minulého roku to bylo o 13 % více.

(CERMAT)

2 Vypočtete, za kolik milionů korun prodala společnost zboží v prvním čtvrtletí minulého roku. Výsledek zaokrouhlete na celé miliony.

Řešení: za 69 milionů korun

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Dvanáct dělníků provede zemní práce za 15 dní.

(CERMAT)

3 Vypočtete, za jak dlouho by zemní práce provedlo při stejném výkonu devět dělníků.

Řešení: za 20 dní

- 4 Pro průnik množiny M a intervalu $I = (-3; 5)$ platí:
 $M \cap I = \{-1; 1; 3\}$.

Které z následujících čísel množina M nemůže obsahovat?

- A) -5
- B) -3
- C) -1
- D) 3
- E) 5

Řešení: B

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 5

Kamarádi byli na výletě. Každý chlapec složil jako zálohu na výdaje určitou částku, tyto peníze pokryly veškeré náklady a byly utraceny beze zbytku. Při vyúčtování se celková útrata rovnoměrně rozdělila na osobu a den. Někteří z kamarádů pak museli určitou sumu doplatit, jiným se peníze vracely.

Níže je tabulka s vyúčtováním. Je však neúplná, neboť některé údaje byly špatně čitelné.

Jméno	Počet dnů	Záloha [Kč]	Musí doplatit [Kč]	Bude mu vráceno [Kč]
Adam	7	540	0	36
David		490	0	58
Filip	7		44	0
Honza	4			0

(CERMAT)

- 5 Doplňte správná čísla do prázdných políček tabulky.

Řešení:

Jméno	Počet dnů	Záloha [Kč]	Musí doplatit [Kč]	Bude mu vráceno [Kč]
Adam	7	540	0	36
David	6	490	0	58
Filip	7	460	44	0
Honza	4	238	50	0

2. Algebraické výrazy

1 Proveďte dělení mnohočlenů a stanovte, pro která reálná čísla r má dělení smysl.

$$(r^3 - 2r^2 - 9r + 18) : (r - 3)$$

Řešení: $r^2 + r - 6; r \neq 3$

2 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (2.1–2.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

	A	N
2.1 Pro každá dvě reálná čísla a, b platí $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2.2 Pro každé reálné x platí $(-3 - x)^2 = 9 + 6x + x^2$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2.3 Pro každé reálné $a \neq 1$ platí $1 - a \cdot \frac{1-a}{a-1} = a + 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2.4 Pro každé reálné $c \neq 2$ platí $\frac{2-c^2}{c-2} = 2 + c$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Řešení: NE, ANO, ANO, NE

3 Je dán výraz:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4}$$

3.1 Určete, pro které hodnoty $x \in \mathbf{R}$ má výraz smysl, a výraz zjednodušte.

3.2 Určete hodnotu výrazu pro $x = 0$.

3.3 Určete hodnoty proměnné $x \in \mathbf{R}$, pro které má výraz hodnotu 0.

3.4 Určete hodnoty proměnné $x \in \mathbf{R}$, pro které má výraz hodnotu 1.

Řešení: 3.1 $\frac{x+5}{x+2}; x \neq \pm 2$

3.2 2,5

3.3 $x = -5$

3.4 Výraz nenabývá hodnoty 1 pro žádnou reálnou hodnotu proměnné x .

4 Je dán výraz:

$$\frac{b}{b+2} - \frac{b^2 - 2b}{4 - b^2}$$

Který z upravených výrazů je s daným výrazem ekvivalentní?

A) $\frac{2b}{b+2}; b \neq -2; b \neq 2$

B) $0; b \neq -2; b \neq 4$

C) $\frac{2b}{b-2}; b \neq -2; b \neq 2$

D) $\frac{b}{b+2}; b \neq -2; b \neq 2$

E) $\frac{4b}{b^2-4}; b \neq -2; b \neq 2$

Řešení: A

3. Rovnice a nerovnice

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Na večírek přišlo třikrát více chlapců než děvčat. Po odchodu 8 chlapců a 8 děvčat zbylo na večírku pětkrát více chlapců než děvčat.

(CERMAT)

1 Určete, kolik chlapců a kolik děvčat přišlo na večírek.

Uvedte celý postup řešení.

Řešení:

h – počet chlapců, d – počet dívek

$$h = 3d$$

$$\underline{h - 8 = 5(d - 8)}$$

$$3d - 8 = 5d - 40$$

$$d = 16; h = 48$$

Na večírek přišlo 48 chlapců a 16 děvčat.

2 V rovnici $x^2 + bx - 12 = 0$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$ je jeden kořen $x_1 = -2$.

Vypočtete koeficient b a druhý kořen.

Řešení: $b = -4$; $x_2 = 6$

3 Je dána nerovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{4x - 7}{2} - \frac{x - 4}{6} \geq 2x - 3$$

Který z intervalů představuje množinu všech řešení nerovnice?

A) $\langle \frac{14}{9}; +\infty \rangle$

B) $\langle 1; +\infty \rangle$

C) $(-\infty; 2)$

D) $(-\infty; 1)$

E) $(-\infty; -7)$

Řešení: D

4 Pro veličiny r_1, r_2, f, n platí:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Které vyjádření veličiny f odpovídá uvedenému vztahu?

A) $f = (n - 1)(r_1 + r_2)$

B) $f = \frac{1}{n-1} (r_1 + r_2)$

C) $f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1+r_2)}$

D) $f = \frac{(n-1)r_1 r_2}{r_1+r_2}$

E) žádné z uvedených

Řešení: C

4. Funkce

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Teplota se měří v Celsiových nebo Fahrenheitových stupních. Hodnoty ve Fahrenheitových stupních (f) jsou lineární funkcí hodnot v Celsiových stupních (c).

Např. 8 °C odpovídá 46,4 °F a 24 °C odpovídá 75,2 °F.

(CERMAT)

1 Určete předpis této funkce.

Řešení: $f = 1,8c + 32,0$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

V půjčovně automobilů se pan Novák rozhoduje, zda si má půjčit automobil A nebo B.

Náklady n (v Kč) na provoz automobilu A jsou určeny lineární funkcí $n = 3\,000 + 2,4x$, náklady na provoz automobilu B lineární funkcí $n = 9\,000 + 1,6x$, kde proměnná x (v km) je ujetá vzdálenost.

(CERMAT)

2 Vypočtete, jakou vzdálenost musí pan Novák nejméně ujet, aby se mu výpůjčka automobilu B vyplatila.

Řešení: 7 500 km

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Kolikrát (y) se zvětší množství bakterií za určitou dobu (x), lze za určitých podmínek vyjádřit exponenciální funkcí $y = a^x$, kde $x \geq 0$.

V laboratorním experimentu se během každých 2 hodin ($x = 2$) množství bakterií zvětší čtyřikrát ($y = 4$).

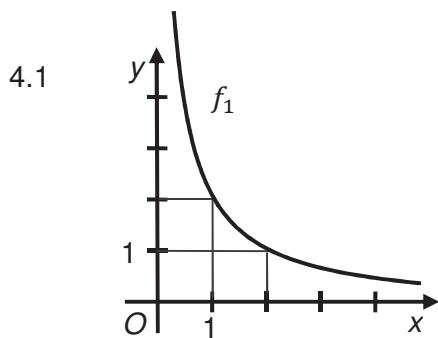
(CERMAT)

3 Kolikrát se zvětší množství bakterií během 6 hodin laboratorního experimentu?

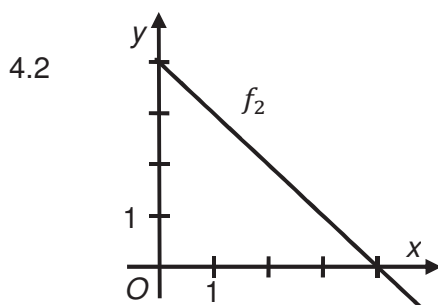
- A) dvanáctkrát
- B) šestnáctkrát
- C) čtyřiašedesátkrát
- D) osmačtyřicekrát
- E) čtyřiašedesátkrát

Řešení: E

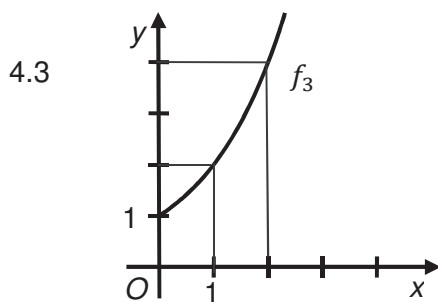
4 Přiraďte ke každému grafu funkce f_1-f_4 (4.1–4.4) pro $x \in \mathbb{R}^+$, resp. $x \in \mathbb{R}_0^+$ odpovídající předpis funkce (A–F).



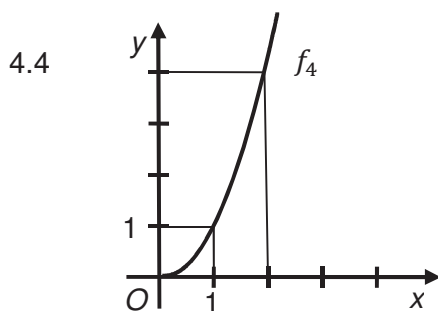
f_1 _____



f_2 _____



f_3 _____



f_4 _____

- A) $y = 2^x$
- B) $y = -4x$
- C) $y = \log x$
- D) $y = \frac{2}{x}$
- E) $y = x^2$
- F) $y = 4 - x$

Řešení: D, F, A, E

5 Funkce f je dána předpisem $y = \frac{x-2}{x}$.

5.1 Určete průsečíky grafu funkce f se souřadnicovými osami.

5.2 Zapište rovnice asymptot grafu funkce f .

5.3 Sestrojte graf funkce f .

Uveďte postup řešení.

Řešení:

5.1 Průsečík se souřadnicovou osou x :

$$y = 0, \text{ tedy } 0 = \frac{x-2}{x} \Leftrightarrow x = 2$$

$$X[2; 0]$$

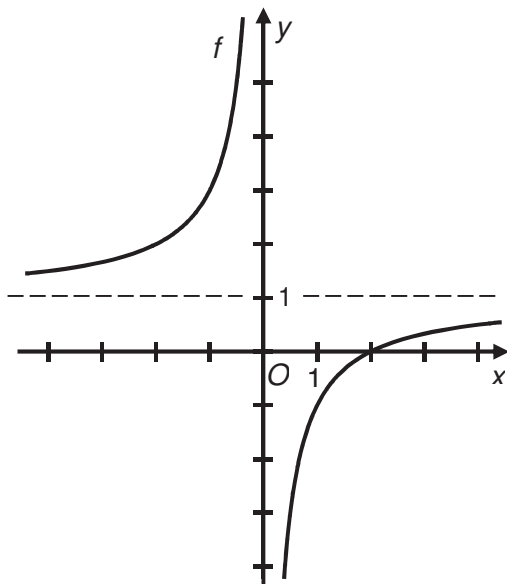
Průsečík se souřadnicovou osou y neexistuje ($x \neq 0$).

5.2 Platí:

$$y = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}, \text{ tedy asymptoty procházejí bodem } S[0; 1]$$

Rovnice asymptot: $x = 0; y = 1$

5.3



6 Pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ řešte rovnici $\sin x = 1 - \sin x$.

Řešení: $K = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

5. Posloupnosti a finanční matematika

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Plechovky jsou narovnány v deseti řadách nad sebou. Ve spodní řadě je 24 plechovek, v každé další řadě je vždy o jednu plechovku méně.

(CERMAT)

1 Kolik plechovek je narovnáno ve všech deseti řadách?

Řešení: 195 plechovek

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

V soutěži byly za prvních 6 míst vyplaceny odměny v celkové hodnotě 2 400 Kč. Nejvyšší odměnu získal vítěz, odměny za další umístění se postupně snižovaly vždy o stejnou částku.

(CERMAT)

2 Kolik korun získali dohromady vítěz a soutěžící na šestém místě?

- A) 800 Kč
- B) 1 000 Kč
- C) 1 200 Kč
- D) 1 200 Kč
- E) nelze jednoznačně určit

Řešení: A

3 Kolik po sobě jdoucích přirozených čísel od 1 do n musíte nejméně sečíst, aby jejich součet přesáhl 1 000 000?

- A) 999
- B) 1 000
- C) 1 202
- D) 1 414
- E) 1 828

Řešení: D

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

V rámci úsporných opatření rozhodlo vedení podniku, že na konci každého čtvrtletí klesne počet zaměstnanců podniku o 7 % oproti stavu na počátku čtvrtletí.

(CERMAT)

4 O kolik procent přibližně klesne počet zaměstnanců po uplynutí jednoho roku?

- A) o 20 %
- B) o 22 %
- C) o 25 %
- D) o 27 %
- E) o 30 %

Řešení: C

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Majitel dílny nakoupil na úvěr s roční úrokovou mírou 10 % materiál v ceně 800 000 Kč, úroky se připisují koncem každého ročního úrokovacího období. Majitel splatí celou částku jednorázově po uplynutí pěti let.

(CERMAT)

5 Vypočtěte, o kolik procent splátka převýší úvěr.

Řešení: přibližně o 61 %

6. Planimetrie

- 1 Strana AB obdélníku $ABCD$ měří 84 cm. Úhlopříčka AC je o 72 cm delší než strana BC .

Určete obsah obdélníku $ABCD$.

Řešení: 1 092 cm²

- 2 Jaká je velikost vnitřního úhlu pravidelného osmiúhelníku?

- A) 108°
- B) 120°
- C) 125°
- D) 135°
- E) 140°

Řešení: D

- 3 Které dokončení věty vede k pravdivému tvrzení?

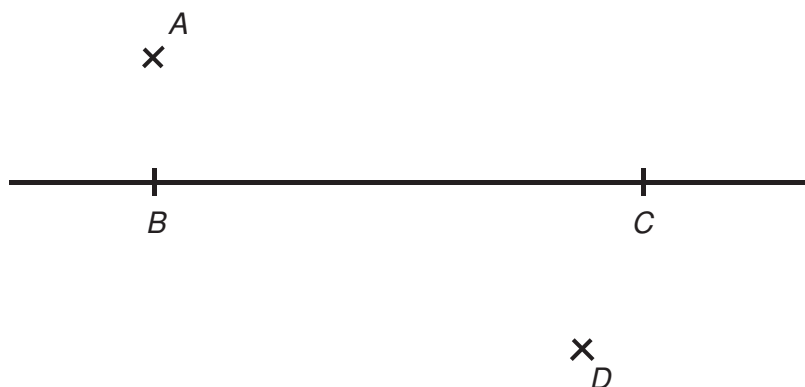
Jestliže se průměr kruhu zvětší třikrát, pak se jeho

- A) poloměr zvětší 1,5krát, obvod se zvětší 6krát a obsah se zvětší 9krát.
- B) poloměr zvětší 3krát, obvod se zvětší 3krát a obsah se zvětší 3krát.
- C) poloměr zvětší 3krát, obvod se zvětší 3krát a obsah se zvětší 9krát.
- D) poloměr zvětší 9krát, obvod se zvětší 9krát a obsah se zvětší 9krát.
- E) poloměr zvětší 3krát, obvod se zvětší 6krát a obsah se zvětší 9krát.

Řešení: C

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 4

Bod A je vrcholem trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu B .
 Bod D je vrcholem trojúhelníku BCD s pravým úhlem při vrcholu D .



(CERMAT)

max. 2 body

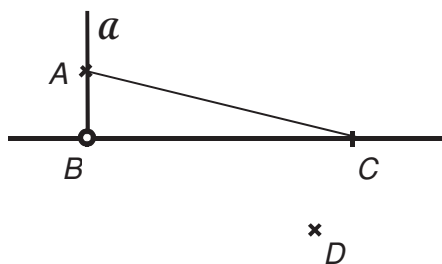
4

- 4.1 V polorovině BCA sestrojte množinu \mathcal{A} všech bodů A^* , které jsou vrcholy trojúhelníků A^*BC s pravým úhlem při vrcholu B .
- 4.2 V polorovině BCD sestrojte množinu \mathcal{D} všech bodů D^* , které jsou vrcholy trojúhelníků BCD^* s pravým úhlem při vrcholu D^* .

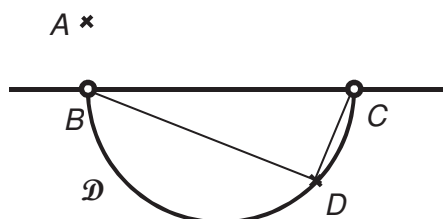
Nalezené množiny označte symboly \mathcal{A} a \mathcal{D} .

Řešení:

- 4.1 Polopřímka BA bez počátečního bodu B :



- 4.2 Půlkružnice BC bez krajních bodů B, C :



7. Stereometrie

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Jedna z kopulí hvězdárny M. Koperníka v Brně má tvar polokoule o průměru 6 m. Kopuli je třeba natřít z vnější strany. Náklad na 1 m² nátěru je 150 Kč.

(CERMAT)

- 1 Vypočtete s přesností na stovky korun, kolik bude stát jeden nátěr kopule.

Řešení: 8 500 Kč

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Na polici stojí akvárium. Tloušťka jeho skel je 5 mm. Celý vnitřní prostor akvária tvaru krychle vyplní voda o objemu 27 litrů.

(CERMAT)

- 2 Jakou plochu na polici akvárium zabírá?

- A) 30 dm²
- B) 90 dm²
- C) 900 cm²
- D) 930 cm²
- E) 961 cm²

Řešení: E

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Silničáři opravují cestu. Používají silniční válec s průměrem 120 cm a šířkou 1,75 m.

(CERMAT)

- 3 Vypočtete s přesností na m² obsah plochy, kterou válec uválcuje za pět otočení.

Řešení: 33 m²

8. Analytická geometrie

1 Je dána přímka $p: x - 2y - 7 = 0$.

Jaké může být její parametrické vyjádření?

A) $x = 1 + 2t, y = -3 + t; t \in \mathbf{R}$

B) $x = -1 - 2t, y = -3 - t; t \in \mathbf{R}$

C) $x = -3 + 2t, y = 1 + t; t \in \mathbf{R}$

D) $x = 1 - 2t, y = -3 + t; t \in \mathbf{R}$

E) $x = -1 + 2t, y = 3 - t; t \in \mathbf{R}$

Řešení: A

2 Je dána přímka $q: x = 3t, y = 12 - 4t; t \in \mathbf{R}$.

Vypočtete vzdálenost přímky q od rovnoběžné přímky p , která prochází počátkem soustavy souřadnic.

Řešení: $\frac{36}{5}$

3 Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S . Označme vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (3.1–3.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

	A	N
3.1 $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3.2 $\overrightarrow{SB} = \vec{u} - \vec{v}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3.3 $\overrightarrow{AE} = 2\vec{v} - \vec{u}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3.4 $\overrightarrow{FD} = 2\vec{u} - \vec{v}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Řešení: ANO, ANO, ANO, NE

9. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Zákazník si vybírá materiál pro šatní skříně – jeden druh dřeva a jeden typ doplňků. V nabídce je 7 druhů světlého dřeva, 6 druhů tmavého dřeva a dále 4 typy doplňků vhodných jen pro světlé dřevo, 5 typů vhodných jen pro tmavé dřevo a 2 univerzální typy pro jakýkoliv druh dřeva.

(CERMAT)

1 Kolik vhodných dvojic (dřevo a doplňky) je možné nabídnout?

- A) 82
- B) 85
- C) 143
- D) 13^2
- E) jiná možnost

Řešení: E

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 2

Čtyři studenti sportovního gymnázia zadávali anketu. Pět set náhodně oslovených lidí jim odpovědělo na otázku, zda pravidelně jezdí na kole nebo na in-line bruslích. Jejich odpovědi jsou zpracovány v tabulce.

	Jezdí na kole	Nejezdí na kole
Jezdí na in-line bruslích	90	20
Nejezdí na in-line bruslích	210	180

(CERMAT)

2

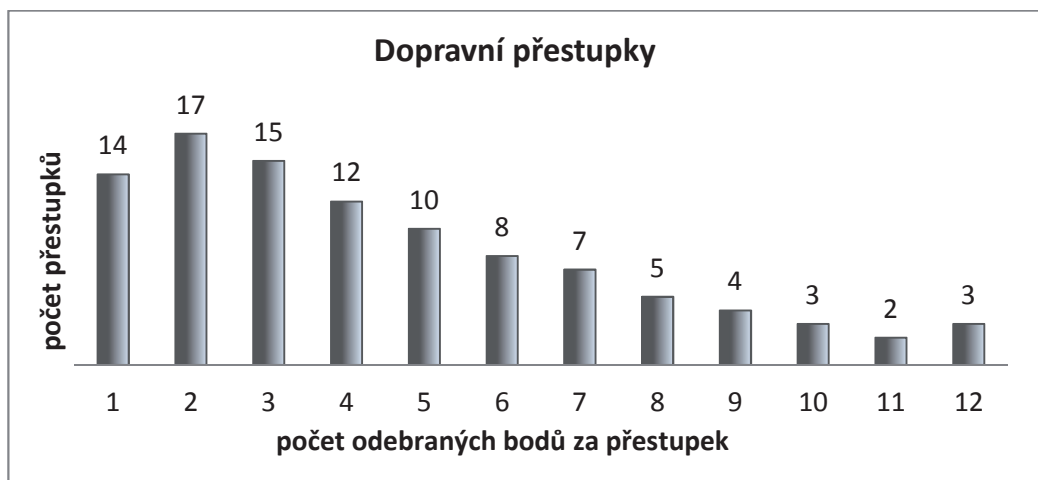
- 2.1 Vypočtete, s jakou pravděpodobností mohl jeden ze studentů vyhrát sázku, že první osoba z náhodně oslovených jezdí **pouze** na in-line bruslích.
- 2.2 Vypočtete, jaké procento dotázaných **nejezdí** na in-line bruslích.

Řešení: 2.1 Student mohl vyhrát sázku s pravděpodobností $p = 0,04$.

2.2 Na in-line bruslích nejezdí 78 % dotázaných.

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 3

V grafu je statistika dopravních přestupků ve sledovaném období. Závažnost dopravního přestupku vyjadřuje počet odebraných bodů.



Např. bylo spácháno 10 pětibodových přestupků.

(CERMAT)

3

- 3.1 Určete, kolik bodů za přestupek bylo odebíráno nejčastěji.
- 3.2 Určete průměrný počet bodů odebraných za přestupek.
- 3.3 Určete, v kolika případech počet odebraných bodů za přestupek překročil průměrnou hodnotu.
- 3.4 Určete medián počtu odebraných bodů za přestupek.

Řešení: 3.1 2 body

3.2 4,52 bodu

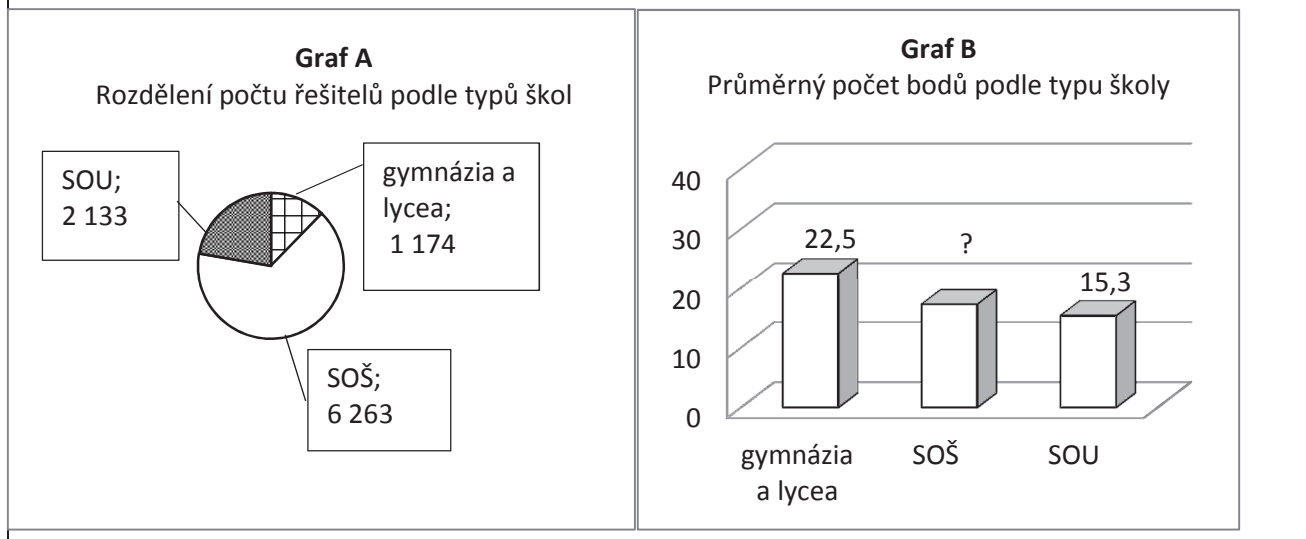
3.3 ve 42 případech

3.4 4 body

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 4

Graf A ukazuje, kolik žáků tří základních typů středních škol řešilo v roce 2003 úlohy z matematiky. Graf B poskytuje informaci o průměrném počtu bodů (ze 40 možných), které se žákům podařilo získat. Průměrný počet bodů všech řešitelů byl 17,4.

(SOŠ jsou střední odborné školy, SOU jsou střední odborná učiliště.)



(CERMAT)

- 4 S přesností na desetiny určete průměrný počet bodů, které získali v roce 2003 studenti SOŠ.

Řešení: 17,2 bodu

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 5

Pan Mrázek několikrát do měsíce kontroloval spotřebu plynu v domácnosti. Vždy v 7 hodin odečetl stav plynoměru a společně s datem jej zapsal do tabulky.

Datum odečtu	Údaj na plynoměru v m ³
1. 4.	1 243,56
7. 4.	1 248,73
12. 4.	1 256,80
18. 4.	1 263,95
25. 4.	1 275,15
30. 4.	1 282,90

(CERMAT)

5 Ve kterém období mezi dvěma následujícími odečty byla průměrná denní spotřeba plynu největší?

- A) od 1. 4. – 7. 4.
- B) od 7. 4. – 12. 4.
- C) od 12. 4. – 18. 4.
- D) od 18. 4. – 25. 4.
- E) od 25. 4. – 30. 4.

Řešení: B

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 6

V tabulce jsou uvedeny výsledky zápasů pěti fotbalových družstev, z nichž každé dosud sehrálo 10 zápasů. Za každou výhru získává družstvo 3 body a za každou remízu 1 bod. Slavia prohrála 3 zápasy z deseti a získala celkem 17 bodů.

Družstvo	Počet			Body
	výher	remíz	proher	
Sparta	8	1	1	25
Slavia	?	?	3	17
Teplice	6	3	1	21
Liberec	2	4	4	10
Ostrava	6	2	2	20
...				

(CERMAT)

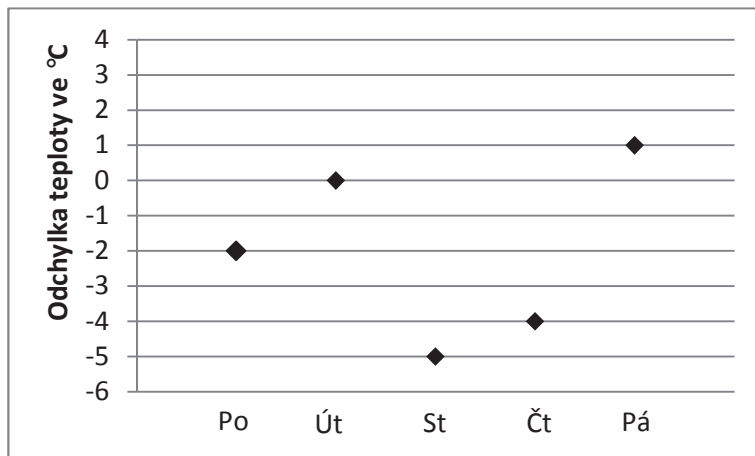
6 Kolik zápasů vyhrála Slavia?

- A) 3 zápasy
- B) 4 zápasy
- C) 5 zápasů
- D) jiný počet zápasů
- E) odpověď nelze určit

Řešení: C

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 7

Graf ukazuje odchylky maximálních denních teplot od průměrné dlouhodobé polední teploty (ve stupních Celsia), záznam je veden od pondělí do pátku. Průměrná dlouhodobá polední teplota byla 20 °C.



(GERMAT)

7 Jaká je průměrná hodnota maximálních teplot v pěti uvedených dnech?

- A) 12 °C
- B) 14 °C
- C) 16 °C
- D) 18 °C
- E) 20 °C

Řešení: D